

POLYGONES DE NEWTON DE CERTAINES SOMMES DE CARACTÈRES ET SÉRIES DE POINCARÉ.

RÉGIS BLACHE

RÉSUMÉ. On se propose dans cet article de donner quelques résultats sur le comportement asymptotique des polygones de Newton des fonctions L associées à des sommes exponentielles, provenant de certains polynômes de Laurent en n variables. A cet effet, on étudie et on utilise la somme directe de polyèdres convexes. Cette opération permet de déterminer aisément la limite des polygones de Newton génériques associés à la somme directe $\Delta = \Delta_1 \oplus \Delta_2$ quand on connaît la limite des polygones de Newton génériques associés à chacun des polyèdres Δ_i . Ce sont à notre connaissance les premiers résultats sur le comportement asymptotique des polygones de Newton pour les polynômes à plusieurs variables.

TABLE DES MATIÈRES

0. Introduction	1
1. Sommes directes de polyèdres.	5
2. Sommes exponentielles.	8
3. Comportement asymptotique, cas additif.	10
4. Comportement asymptotique, cas mixte.	13
5. Polynômes de polyèdres d'exposant deux.	17
Références	21

0. INTRODUCTION

Dans toute la suite, on note k un corps fini possédant $q = p^a$ éléments, et k_r son extension de degré r dans une clôture algébrique \bar{k} fixée une fois pour toutes. On note $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, et on choisit $f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^n} a_{\mathbf{i}} \mathbf{x}^{\mathbf{i}} \in k[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]$ un polynôme de Laurent en n variables à coefficients dans k . Si ψ est un caractère additif (non trivial) de k , on note $\psi_r := \psi \circ \text{Tr}_{k_r/k}$ le caractère induit par ψ sur k_r ; d'autre part on note χ un caractère multiplicatif de $(k^\times)^n$, et $\chi_r := \chi \circ \text{N}_{k_r/k}$ son extension à $(k_r^\times)^n$. On forme les sommes exponentielles associées à f et χ sur chacune des extensions de k

$$S_r(f, \chi) = \sum_{\mathbf{x} \in \mathbb{G}_m^n(k_r)} \psi(f(\mathbf{x})) \chi(\mathbf{x}),$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 11M38, 14F30, 52B20.

Key words and phrases. Sommes de caractères, fonctions L , polygones et polyèdres de Newton.

puis à partir de cette famille de sommes on construit la fonction L

$$L(f, \chi; T) = \exp \left(\sum_{r \geq 1} S_r(f, \chi) \frac{T^r}{r} \right).$$

Quand χ est le caractère trivial, on notera simplement $L(f; T)$ cette fonction. On sait depuis les travaux de Dwork et de Grothendieck (cf. [8], [9]) que c'est une fraction rationnelle.

Commençons par le cas où χ est trivial, qui est le plus classique dans la littérature. Le premier résultat dans cette direction est dû à Deligne [6, Théorème 8.4]. Il affirme que pour un polynôme de degré d premier à p dont la forme de plus haut degré définit une hypersurface non singulière de l'espace projectif \mathbb{P}^{n-1} , la fonction $L'(f, T)$ (où cette fois les sommes sont définies sur \mathbb{A}^n et non plus sur \mathbb{G}_m^n) est de degré $(d-1)^n$.

De façon générale, on peut associer au polynôme f son *polyèdre de Newton à l'infini*, qui est le polyèdre convexe Δ défini dans l'espace affine \mathbb{R}^n comme l'enveloppe convexe de l'origine et du support de f (c'est à dire de l'ensemble des \mathbf{i} de \mathbb{Z}^n tels que $a_{\mathbf{i}}$ est non nul). Alors sous des conditions de non dégénérescence de certaines formes de plus haut degré de f , Adolphson et Sperber [1] ont montré que $L(f; T)^{(-1)^{n-1}}$ est en fait un polynôme de degré $n!V(\Delta)$, où V désigne le volume usuel sur \mathbb{R}^n .

Notons $\alpha_1, \dots, \alpha_{n!V(\Delta)}$ les racines réciproques de ce polynôme. Ce sont des entiers algébriques possédant les propriétés suivantes : si α_i est l'un d'entre eux, son module complexe est $|\alpha_i| = q^{\frac{w_i}{2}}$, pour un entier $0 \leq w_i \leq n$. Tous les conjugués de α_i sont de même module complexe. La distribution des w_i est connue [7, Theorem 1.8]. D'autre part, pour tout premier $\ell \neq p$, α_i est une unité ℓ -adique. Finalement, on a $|\alpha_i|_p = q^{-s_i}$, pour s_i un rationnel compris entre 0 et n . C'est à ces valuations que nous allons nous intéresser.

Comme d'habitude, on identifie les valuations q -adiques des racines réciproques d'un polynôme avec les pentes des segments de son polygone de Newton q -adique. Pour simplifier les notations, nous noterons $\text{NP}_q(f)$ (resp. $\text{NP}_q(f, \chi)$) le polygone de Newton q -adique de $L(f; T)$ (resp. de $L(f, \chi; T)$) dans la suite. Si Π est un polygone convexe de longueur l , c'est à dire le graphe d'une fonction convexe, continue sur l'intervalle $[0, l]$ et affine par morceaux sur chacun des intervalles $[i-1, i]$, on notera $\Pi = (\pi_i)_{1 \leq i \leq l}$ quand sa pente sur $[i-1, i]$ est π_i . Si Π_1 et Π_2 sont deux polygones convexes de longueur l , on écrira $\Pi_1 \preceq \Pi_2$ quand Π_1 est au dessus de Π_2 , et que leurs extrémités coïncident.

Adolphson et Sperber ont prouvé [1, Theorem 3.10] l'existence d'une borne inférieure pour les polygones de Newton des fonctions $L(f; T)^{(-1)^{n-1}}$ quand f décrit l'ensemble des polynômes non dégénérés de polyèdre Δ . Cette borne est souvent appelée *polygone de Hodge*, et notée $\text{HP}(\Delta)$. Il s'agit d'un invariant ne dépendant que de Δ , que nous allons maintenant décrire. Remarquons qu'il ne s'agit en général ni du polygone de Hodge d'un cristal comme dans [11], ni d'un polygone de Hodge géométrique, ces deux familles de polygones ayant toutes leurs pentes entières.

Notons $C(\Delta) := \mathbb{R}_+ \Delta$ le cône de Δ dans \mathbb{R}^n , $M_\Delta := C(\Delta) \cap \mathbb{Z}^n$ le monoïde associé à ce cône, et \mathcal{A}_Δ l'algèbre $k[\mathbf{x}^{M_\Delta}]$. On peut définir une application de $C(\Delta)$ dans \mathbb{R}_+ , le *poids associé à Δ* par

$$w_\Delta(\mathbf{u}) = \min\{\rho \in \mathbb{R}_+, \mathbf{u} \in \rho\Delta\}.$$

Les sommets du polyèdre Δ étant dans \mathbb{Z}^n , l'image de M_Δ par w_Δ est contenue dans \mathbb{Q}_+ , et plus précisément dans $\frac{1}{D}\mathbb{N}$ pour un certain entier $D > 0$, minimal, qu'on appellera dans la suite le *dénominateur* de Δ . Le poids w_Δ fait de l'algèbre \mathcal{A}_Δ une algèbre graduée

$$\mathcal{A}_\Delta = \oplus_{i \geq 0} \mathcal{A}_{\Delta, \frac{i}{D}}, \quad \mathcal{A}_{\Delta, \frac{i}{D}} = \text{Vect}\{\mathbf{x}^{\mathbf{u}}, w_\Delta(\mathbf{u}) = \frac{i}{D}\}$$

à laquelle on associe sa série de Poincaré

$$P_{\mathcal{A}_\Delta}(t) := \sum_{i \geq 0} \dim \mathcal{A}_{\Delta, \frac{i}{D}} t^i.$$

Kouchnirenko [13, Lemme 2.9] a montré que quand f est non dégénéré, cette série est en fait une fraction rationnelle. Plus précisément, $P_\Delta(t) := (1 - t^D)^n P_{\mathcal{A}_\Delta}(t)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à nD . Si on note $P_\Delta(t) := \sum \ell_i t^{s_i}$, le polygone $\text{HP}(\Delta)$ est alors le polygone convexe commençant à l'origine, et formé de la juxtaposition des segments de longueur horizontale ℓ_i et de pente $\frac{s_i}{D}$. Par commodité, on l'appellera aussi dans la suite le *polygone issu de la série de Poincaré* $P_{\mathcal{A}_\Delta}$. Le résultat d'Adolphson et Sperber se réécrit donc ainsi : pour tout polynôme f de $k[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]$ de polyèdre Δ et non dégénéré, on a $\text{NP}_q(f) \preceq \text{HP}(\Delta)$.

Il est maintenant naturel de se demander comment varient les polygones $\text{NP}_q(f)$ quand f varie parmi les polynômes de polyèdre fixé, non dégénérés. Malheureusement ces variations sont très difficiles à contrôler ; des calculs explicites dans le cas de polynômes de petit degré en une variable montrent qu'il est illusoire d'espérer donner une réponse complète à cette question. Pour contourner cette difficulté, on préfère parler de *polygone de Newton générique*. Le théorème de spécialisation de Grothendieck [11] assure que la borne inférieure des $\text{NP}_q(f)$ existe, et qu'elle est atteinte pour tous les points dans un ouvert dense de l'espace des polynômes de polyèdre fixé, non dégénérés ; c'est cette borne inférieure qu'on appelle le polygone de Newton générique. Ce polygone ne dépend pas de q , mais seulement de p , et on le note $\text{GNP}(\Delta, p)$. Dans le cas de la dimension 1, on sait calculer explicitement ce polygone [4], ainsi que le polynôme de Hasse, qui détermine l'hypersurface de l'espace des polynômes hors de laquelle on a $\text{NP}_q(f) = \text{GNP}(\Delta, p)$.

On se pose donc la question du comportement du polygone de Newton générique. Pour des raisons liées à la ramification, il est aisé de voir qu'une condition nécessaire pour qu'il coïncide avec le polygone de Hodge est d'avoir $p \equiv 1 \pmod{D}$. Adolphson et Sperber ont conjecturé que cette condition est suffisante. La conjecture est avérée en dimension $n \leq 3$, mais elle est fautive en dimension supérieure, où il faut remplacer D par un multiple D^* en général strict, comme l'a démontré Wan [17], [18]. Donc on a $\liminf_{p \rightarrow \infty} \text{GNP}(\Delta, p) = \text{HP}(\Delta)$. Wan a conjecturé [18, Conjecture 1.11] que la limite existe sous certaines hypothèses, c'est à dire que $\lim_{p \rightarrow \infty} \text{GNP}(\Delta, p) = \text{HP}(\Delta)$. Ce résultat est connu pour les polynômes de Laurent en une variable [4], [15]. On va démontrer cette conjecture dans deux cas

- i/ quand Δ est l'enveloppe convexe de points de la forme $\{d_i \mathbf{e}_i, -d'_i \mathbf{e}_i\}_{1 \leq i \leq n}$, avec $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ une base du \mathbb{Z} -module \mathbb{Z}^n ; ce sera le théorème 3.1.
- ii/ quand Δ est l'enveloppe convexe de points de la forme $\{d_i \mathbf{f}_i, -d'_i \mathbf{f}_i\}_{1 \leq i \leq n}$, où $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n$ engendrent un sous module M de \mathbb{Z}^n tel que $2\mathbb{Z}^n \subset M$; ce sera le théorème 5.1.

Ce sont à notre connaissance les premiers résultats sur le comportement asymptotique de somme de caractères associées à des polynômes de plusieurs variables. Notons que le cas *i*/ couvre en particulier les polynômes étudiés par Deligne.

Une autre question, plus difficile, est la suivante : choisissons un polynôme de Laurent \tilde{f} à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}$, et soit $\mathbb{Q}_{\tilde{f}}$ l'extension de \mathbb{Q} engendrée par les coefficients de \tilde{f} . Pour chaque premier p de \mathbb{Q} , on choisit \mathfrak{p} un premier au dessus de p dans le corps $\mathbb{Q}_{\tilde{f}}$, de corps résiduel \mathbb{F}_q . On se demande comment varient les polygones de Newton $\text{NP}_q(\tilde{f} \bmod \mathfrak{p})$ des réductions modulo \mathfrak{p} de \tilde{f} quand p tend vers l'infini. Considérons l'espace des polynômes à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}$, de polyèdre de Newton Δ , et de monômes prescrits de façon à ce que le sous-monoïde de M_{Δ} engendré par les exposants des monômes prescrits contienne tous les éléments de M_{Δ} à l'exception d'un nombre fini. Alors Wan conjecture [18, Conjecture 1.12] qu'il existe un ouvert dense défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$ de l'espace de ces polynômes tel que pour tout \tilde{f} de cet ouvert on ait

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \text{NP}_q(\tilde{f} \bmod \mathfrak{p}) = \text{HP}(\Delta).$$

Ce résultat est connu pour l'espace de tous les polynômes de degré d en une variable [20, Theorem 1.3], ainsi que pour l'espace des polynômes de Laurent de degrés d et d' en une variable [14]. On va le montrer pour certains espaces de polynômes à plusieurs variables dont le polyèdre de Newton est de l'une des formes décrites dans les cas *i*/ et *ii*/ ci-dessus ; voir les théorèmes 3.2 et 5.2.

Dans le cas où χ n'est pas trivial, la situation est un peu plus compliquée. Adolphson et Sperber ont montré, toujours sous des conditions de non-dégénérescence, que la fonction L a le même degré que dans le cas additif (*cf.* [2], [3]). Ils ont aussi donné une borne inférieure pour les polygones de Newton de telles sommes. Si on peut toujours décrire cette borne inférieure à l'aide de séries de Poincaré, elle dépend maintenant du résidu de p modulo l'ordre du caractère χ . En particulier on ne peut plus espérer obtenir une limite quand p tend vers ∞ , à moins de supposer que le caractère est d'ordre deux (c'est ce résultat qui nous permet de prouver le cas *ii*/ ci-dessus). En revanche, quand p tend vers ∞ le long d'une classe modulo l'ordre du caractère, on retrouve l'existence d'une limite, généralisant ainsi les résultats en dimension 1 de [5]. Ces résultats font l'objet des théorèmes 4.1 et 4.2.

Cet article est organisé de la façon suivante : dans le premier chapitre, nous définissons la somme directe de polyèdres convexes, et calculons le polygone de Hodge associé. Dans le second nous utilisons des résultats de cohomologie ℓ -adique (principalement la formule de Künneth) pour exprimer les polygones de Newton de (fonctions L de) sommes associées à certains polynômes en plusieurs variables à l'aide des polygones de Newton associés à des polynômes plus simples. Dans le chapitre 3 sont démontrés les conjectures de Wan dans le cas *i*/ : on y rappelle la situation, connue, des polynômes de Laurent en une variable, puis on en déduit les théorèmes 3.1 et 3.2. Ensuite, dans le quatrième chapitre, on donne quelques applications au cas des sommes mixtes, tordues par un caractère multiplicatif. Finalement, on utilise les deux résultats et la formule de Poisson pour déduire les conjectures de Wan pour le cas *ii*/ dans le dernier chapitre.

1. SOMMES DIRECTES DE POLYÈDRES.

Dans toute cette section, on fixe deux polyèdres convexes Δ_1 de \mathbb{R}^{n_1} et Δ_2 de \mathbb{R}^{n_2} . On va rappeler la définition de leur *somme directe* $\Delta_1 \oplus \Delta_2$, et donner certaines de ses propriétés; on exprimera ensuite la série de Poincaré de l'algèbre graduée $\mathcal{A}_{\Delta_1 \oplus \Delta_2}$ à l'aide de celles des algèbres graduées \mathcal{A}_{Δ_1} et \mathcal{A}_{Δ_2} , de façon à calculer le polygone de Hodge de $\Delta_1 \oplus \Delta_2$ en fonction de ceux de Δ_1 et Δ_2 .

Commençons par définir la somme directe de polyèdres (cf. [10, 16.1.3]); dans toute la suite, on va supposer que les polyèdres qui interviennent sont de dimension maximale, c'est à dire que l'espace affine qu'ils engendrent est l'espace ambiant.

Définition 1.1. *Soient deux polyèdres convexes Δ_1 et Δ_2 , respectivement dans \mathbb{R}^{n_1} et \mathbb{R}^{n_2} . Leur somme directe est le polyèdre convexe de $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ qui est l'enveloppe convexe de $\Delta_1 \times \{0\} \cup \{0\} \times \Delta_2$. On le note $\Delta_1 \oplus \Delta_2$.*

Remarque 1.1. *Il ne faut pas confondre l'opération qu'on vient de définir avec la somme usuelle de polyèdres (ou somme de Minkowski). Par exemple, si $\Delta_1 = [0, d_1] \subset \mathbb{R}$ et $\Delta_2 = [0, d_2] \subset \mathbb{R}$, alors $\Delta_1 \oplus \Delta_2$ est le triangle de sommets $(0, 0)$, $(d_1, 0)$ et $(0, d_2)$, alors que la somme usuelle de ces polyèdres donne le rectangle de sommets $(0, 0)$, $(d_1, 0)$, $(0, d_2)$ et (d_1, d_2) .*

On va déterminer les faces ne contenant pas l'origine de la somme directe de deux polyèdres convexes contenant chacun l'origine. Ces résultats sont sans doute bien connus mais comme de nombreuses démonstrations de cet article en dépendent, et pour n'avoir pas trouvé de référence convenable, nous les rappelons ici. Par définition, les faces d'un polyèdre sont ses intersections avec ses hyperplans d'appui, ainsi que le polyèdre lui même et l'ensemble vide \emptyset ; ces deux dernières sont parfois appelées impropres.

Proposition 1.1. *Soient Δ_1 et Δ_2 deux polyèdres convexes contenant l'origine, et $\Delta := \Delta_1 \oplus \Delta_2$ leur somme directe. Les faces de Δ ne contenant pas l'origine sont les polyèdres $\sigma := \sigma_1 \oplus \sigma_2$, où σ_i décrit les faces de Δ_i ne contenant pas l'origine pour $i = 1, 2$.*

Si de plus σ_i est une face de dimension d_i , alors σ est une face de Δ de dimension $d_1 + d_2 + 1$.

Démonstration. Commençons par démontrer que si σ_1 (resp. σ_2) est une face (éventuellement vide) de Δ_1 (resp. Δ_2) ne contenant pas l'origine, alors $\sigma_1 \oplus \sigma_2$ est une face de Δ ne contenant pas l'origine. Soit H_1 d'équation $\sum_{i=1}^{n_1} a_i x_i = 1$ (resp. H_2 d'équation $\sum_{i=1}^{n_2} b_i y_i = 1$) un hyperplan d'appui de Δ_1 (resp. Δ_2) pour sa face σ_1 (resp. σ_2). Pour une face vide, on prendra tous les coefficients nuls. Alors puisque Δ_1 contient l'origine, il est contenu dans le demi espace $H_1^- = \{(x_1, \dots, x_{n_1}), \sum_{i=1}^{n_1} a_i x_i \leq 1\}$ de \mathbb{R}^{n_1} , et il en est de même pour Δ_2 dans \mathbb{R}^{n_2} . Considérons l'hyperplan H de $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ d'équation $\sum_{i=1}^{n_1} a_i x_i + \sum_{i=1}^{n_2} b_i y_i = 1$. Alors par définition de Δ comme enveloppe convexe, ce polyèdre est contenu dans le demi espace H^- de $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$, et l'intersection $H \cap \Delta$ contient par construction $\sigma_1 \times \{0\}$ et $\{0\} \times \sigma_2$. En particulier H est un hyperplan d'appui de Δ , et la face $\sigma := H \cap \Delta$ qu'il détermine contient l'enveloppe convexe de $\sigma_1 \times \{0\} \cup \{0\} \times \sigma_2$, c'est à dire la somme directe $\sigma_1 \oplus \sigma_2$. Pour montrer l'autre inclusion, choisissons $\mathbb{Z}(z_1, \dots, z_{n_2})$ un point de σ . Alors \mathbb{Z} est dans Δ , barycentre de $(\mathbf{x}, 0)$ et $(0, \mathbf{y})$ deux points respectivement dans $\Delta_1 \times \{0\}$ et $\{0\} \times \Delta_2$; on peut donc trouver un réel $\lambda \in [0, 1]$ tel que $z_i = \lambda x_i$ pour

$1 \leq i \leq n_1$ et $z_{n_1+i} = (1-\lambda)y_i$ pour $1 \leq i \leq n_2$. Mais puisque \mathbb{Z} est dans H , on a $\sum a_i z_i + \sum b_i z_{n_1+i} = 1$; d'autre part $\sum_{i=1}^{n_1} a_i x_i \leq 1$ et $\sum_{i=1}^{n_2} b_i y_i \leq 1$. Ces deux dernières inégalités doivent être des égalités, c'est à dire que $\mathbf{x} \in \sigma_1$, $\mathbf{y} \in \sigma_2$, et $x \in \sigma_1 \oplus \sigma_2$. On a donc démontré que $\sigma = \sigma_1 \oplus \sigma_2$ est une face de Δ ne contenant pas l'origine.

Inversement soit σ une face de Δ ne contenant pas l'origine, et H un hyperplan d'appui pour cette face. Puisque σ est un polyèdre convexe, il est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux, qui sont les points extrémaux de Δ contenus dans σ . Mais par construction les points extrémaux de Δ sont de la forme $(\mathbf{x}_1, 0)$ ou $(0, \mathbf{x}_2)$, où \mathbf{x}_i décrit les points extrémaux de Δ_i . Notons S_1 l'ensemble des points extrémaux de σ du premier type, S_2 l'ensemble des points extrémaux de σ du second. Alors σ est l'enveloppe convexe de $S_1 \cup S_2$, c'est à dire la somme directe des convexes σ_1 et σ_2 avec σ_i l'enveloppe convexe de S_i , et il suffit maintenant de montrer que σ_i est une face de Δ_i . Si $S_i = \emptyset$, il n'y a rien à montrer; sinon par construction $H_i = H \cap \mathbb{R}^{n_i}$ est un hyperplan d'appui de Δ_i dans \mathbb{R}^{n_i} , et $\sigma_i = \Delta \cap H_i$ est bien une face de Δ_i .

Prouvons finalement l'assertion sur la dimension : la face σ_i est l'enveloppe convexe d'un ensemble S_i de points ne contenant pas l'origine parmi lesquels on peut choisir un sous ensemble maximal S'_i de $d_i + 1$ points affinement indépendants. Les ensembles de points de $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$, $T_1 = S'_1 \times \{0\}$ et $T_2 = \{0\} \times S'_2$ sont disjoints, et affinement indépendants par construction. L'ensemble $T = T_1 \cup T_2$ est donc un sous ensemble maximal de $d_1 + d_2$ points affinement indépendants de $S = S_1 \times \{0\} \cup \{0\} \times S_2$; mais comme σ est par construction l'enveloppe convexe de S , l'assertion en résulte. \square

Comme Δ_i contient l'origine, ses faces ne contenant pas l'origine sont nécessairement de dimension inférieure ou égale à $n_i - 1$; on déduit donc le

Corollaire 1.1. *Les faces de codimension 1 de Δ ne contenant pas l'origine sont les $\sigma = \sigma_1 \oplus \sigma_2$, où σ_i décrit les faces de codimension 1 de Δ_i ne contenant pas l'origine.*

De plus si H_1 d'équation $\sum a_i x_i = 1$ (resp. H_2 d'équation $\sum b_i y_i = 1$) est l'hyperplan d'appui de Δ_1 pour σ_1 (resp. de Δ_2 pour σ_2), alors l'hyperplan d'appui de Δ pour σ a pour équation $\sum a_i x_i + \sum b_i y_i = 1$.

On va maintenant exprimer les différents objets associés au polyèdre $\Delta_1 \oplus \Delta_2$ dans l'introduction à l'aide de ceux associés à chacun de ses facteurs. On aura besoin d'une nouvelle description du poids : soit $\mathbf{u}(u_1, \dots, u_{n_1+n_2})$ un point de $C(\Delta)$. La demi droite $\mathbb{R}^+ \mathbf{u}$ rencontre la frontière du polyèdre Δ en un point d'une face σ de codimension 1 ne contenant pas l'origine. Si H est l'hyperplan d'appui pour cette face, d'équation $a_1 x_1 + \dots + a_{n_1+n_2} x_{n_1+n_2} = 1$, alors le poids de \mathbf{u} est

$$w_\Delta(\mathbf{u}) = a_1 u_1 + \dots + a_{n_1+n_2} u_{n_1+n_2}.$$

Lemme 1.1. *Soient Δ_1 et Δ_2 deux polyèdres convexes contenant l'origine, et $\Delta := \Delta_1 \oplus \Delta_2$ leur somme directe. On note σ_i une face de Δ_i . Alors*

- i/ *le cône $C(\sigma_1 \oplus \sigma_2)$ dans $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ est égal au produit $C(\sigma_1) \times C(\sigma_2)$;*
- ii/ *le monoïde M_Δ est égal au monoïde $M_{\Delta_1} \times M_{\Delta_2}$ de $\mathbb{Z}^{n_1+n_2}$;*
- iii/ *le poids w_Δ est l'application $w_{\Delta_1} + w_{\Delta_2}$ de $C(\Delta)$ dans \mathbb{R}_+ qui à $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ associe $w_{\Delta_1}(\mathbf{u}_1) + w_{\Delta_2}(\mathbf{u}_2)$*

iv/ le dénominateur D de Δ est le plus petit commun multiple des dénominateurs D_1 et D_2 de Δ_1 et Δ_2 .

Démonstration. Montrons la première assertion : le point $\mathbf{u}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ est dans le cône $C(\sigma_1 \oplus \sigma_2)$ si et seulement si on peut trouver un réel ρ tel que $(\rho \mathbf{u}_1, \rho \mathbf{u}_2)$ soit dans $\sigma_1 \oplus \sigma_2$. Mais par définition, ce dernier polyèdre convexe est formé des points de la forme $(\lambda \mathbf{x}_1, (1 - \lambda) \mathbf{x}_2)$ quand λ décrit $[0, 1]$ et les \mathbf{x}_i décrivent σ_i . Chaque \mathbf{u}_i est donc dans $C(\sigma_i)$, et la réciproque est évidente.

Le second point est maintenant une conséquence facile de la définition du monoïde associé à un polyèdre convexe, et de l'assertion *i/* appliquée à $\sigma_i = \Delta_i$.

Pour montrer *iii/*, on va utiliser le corollaire 1.1, ainsi que l'expression du poids donnée ci-dessus. Notons σ une face de codimension 1 de Δ ne contenant pas l'origine en un point de laquelle la demi droite $\mathbb{R}_+ \mathbf{u}$ rencontre la frontière de Δ . D'après le corollaire 1.1, on a $\sigma = \sigma_1 \oplus \sigma_2$, pour σ_i une face de codimension 1 de Δ_i ne contenant pas l'origine. En particulier si $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$, le *i/* nous assure que $\mathbf{u}_i \in C(\sigma_i)$. Si on note $H_1 : a_1 x_1 + \dots + a_{n_1} x_{n_1} = 1$ (*resp.* $H_2 : a_{n_1+1} x_{n_1+1} + \dots + a_{n_1+n_2} x_{n_1+n_2} = 1$) l'hyperplan d'appui de Δ_1 pour σ_1 (*resp.* de Δ_2 pour σ_2) et si $\mathbf{u}_1(u_1, \dots, u_{n_1})$ (*resp.* $\mathbf{u}_2(u_{n_1+1}, \dots, u_{n_1+n_2})$), on doit donc avoir $w_{\Delta_1}(\mathbf{u}_1) = a_1 u_1 + \dots + a_{n_1} u_{n_1}$ (*resp.* $w_{\Delta_2}(\mathbf{u}_2) = a_{n_1+1} u_{n_1+1} + \dots + a_{n_1+n_2} u_{n_1+n_2}$). Toujours d'après le corollaire 1.1, l'équation de l'hyperplan d'appui de Δ pour σ est $a_1 x_1 + \dots + a_{n_1+n_2} x_{n_1+n_2} = 1$, et $w_\Delta(\mathbf{u}) = a_1 u_1 + \dots + a_{n_1+n_2} u_{n_1+n_2}$; c'est le résultat annoncé.

La dernière assertion est une conséquence directe de *iii/* et de la définition du dénominateur d'un polyèdre convexe. \square

On déduit de l'assertion *ii/* que l'algèbre \mathcal{A}_Δ est isomorphe au produit tensoriel (sur k) des algèbres \mathcal{A}_{Δ_1} et \mathcal{A}_{Δ_2} . Venons en à la graduation ; si $\mathbf{x}_i^{\mathbf{u}_i}$ est dans $\mathcal{A}_{\Delta_i, \frac{k_i}{D_i}}$, alors d'après l'assertion *iii/*, le monôme $\mathbf{x}^{\mathbf{u}} = \mathbf{x}_1^{\mathbf{u}_1} \mathbf{x}_2^{\mathbf{u}_2}$ est dans $\mathcal{A}_{\Delta, \frac{k}{D}}$, avec

$$\frac{k_1}{D_1} + \frac{k_2}{D_2} = \frac{k}{D}.$$

On obtient la décomposition suivante pour chaque pièce de la graduation de \mathcal{A}_Δ :

$$\mathcal{A}_{\Delta, \frac{k}{D}} = \bigoplus_{\frac{k_1}{D_1} + \frac{k_2}{D_2} = \frac{k}{D}} \mathcal{A}_{\Delta_1, \frac{k_1}{D_1}} \otimes \mathcal{A}_{\Delta_2, \frac{k_2}{D_2}},$$

puis la factorisation de la série de Poincaré de \mathcal{A}_Δ à l'aide de celles de \mathcal{A}_{Δ_1} et \mathcal{A}_{Δ_2}

$$P_{\mathcal{A}_\Delta}(t) = P_{\mathcal{A}_{\Delta_1}}(t^{\frac{D}{D_1}}) P_{\mathcal{A}_{\Delta_2}}(t^{\frac{D}{D_2}}),$$

et finalement la factorisation $P_\Delta(t) = P_{\Delta_1}(t^{\frac{D}{D_1}}) P_{\Delta_2}(t^{\frac{D}{D_2}})$.

Nous terminons ce paragraphe en démontrant, à l'aide de la formule précédente, que le polygone de Hodge de la somme directe $\Delta = \Delta_1 \oplus \Delta_2$ s'exprime à l'aide des polygones de Hodge de chacun des facteurs. Pour cela nous avons besoin d'introduire une nouvelle opération sur les polygones convexes. Rappelons qu'on a choisi de noter un polygone convexe d'origine O par $(s_i)_{1 \leq i \leq a}$ quand il est formé par la juxtaposition des segments de longueur horizontale 1 et de pente s_i .

Définition 1.2. Soient deux polygones convexes Π_1 et Π_2 . Alors si

$$\Pi_1 = (s_i)_{1 \leq i \leq a}, \quad \Pi_2 = (s'_i)_{1 \leq i \leq b},$$

on définit le produit de Π_1 et Π_2 , et on note $\Pi_1 \times \Pi_2$ le polygone convexe d'origine O défini par

$$\Pi = (s_i + s'_j)_{1 \leq i \leq a, 1 \leq j \leq b}.$$

Remarquons que la longueur horizontale de Π est le produit des longueurs horizontales de Π_1 et Π_2 , mais aussi que la longueur horizontale du segment de pente s dans Π est

$$\ell = \sum_{s_i + s'_j = s} \ell_i \ell'_j,$$

où ℓ_i (resp. ℓ'_j) est la longueur horizontale du segment de pente s_i (resp. s'_j) de Π_1 (resp. Π_2).

On en déduit la décomposition suivante pour le polygone $\text{HP}(\Delta)$.

Proposition 1.2. *Soient Δ_1 et Δ_2 deux polyèdres convexes, et Δ leur somme directe. Alors le polygone de Hodge de Δ est le produit des polygones de Hodge de ses facteurs*

$$\text{HP}(\Delta) = \text{HP}(\Delta_1) \times \text{HP}(\Delta_2).$$

Démonstration. Soit $\ell_{k_1}^{(1)}$ (resp. $\ell_{k_2}^{(2)}$) la longueur horizontale du segment de $\text{HP}(\Delta_1)$ (resp. $\text{HP}(\Delta_2)$) de pente $\frac{k_1}{D_1}$ (resp. $\frac{k_2}{D_2}$). Le segment de pente $\frac{k}{D}$ du produit $\text{HP}(\Delta_1) \times \text{HP}(\Delta_2)$ a pour longueur horizontale $\ell = \sum \ell_{k_1}^{(1)} \ell_{k_2}^{(2)}$ où la somme porte sur les k_1, k_2 tels que $\frac{k_1}{D_1} + \frac{k_2}{D_2} = \frac{k}{D}$. Mais la construction de $\text{HP}(\Delta)$ à partir de P_Δ , jointe à la factorisation de P_Δ , donne le même résultat. \square

2. SOMMES EXPONENTIELLES.

Ici on considère deux polynômes de Laurent sur k , f_1 et f_2 respectivement en n_1 et n_2 variables, d'indéterminées \mathbf{x}_1 et \mathbf{x}_2 , et on appelle $f = (f_1, f_2)$ le polynôme de Laurent en les $n := n_1 + n_2$ variables $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{n_1+n_2})$ tel que $f(\mathbf{x}) = f_1(x_1, \dots, x_{n_1}) + f_2(x_{n_1+1}, \dots, x_{n_1+n_2})$. Il résulte immédiatement de la définition 1.1 que si Δ_1 et Δ_2 sont les polyèdres respectifs de f_1 et f_2 dans \mathbb{R}^{n_1} et \mathbb{R}^{n_2} , alors le polyèdre de f est Δ , la somme directe de Δ_1 et Δ_2 .

On va dans ce chapitre réexprimer les espaces vectoriels de cohomologie ℓ -adique associés aux sommes exponentielles provenant de f à l'aide de la formule de Künneth, et de ceux associés à f_1 et f_2 ; ensuite on en déduira des bornes pour les polygones de Newton génériques associés à Δ en fonction de ceux associés à Δ_1 et Δ_2 .

Commençons par montrer que la condition de non dégénérescence se transmet de f_1 et f_2 à f .

Lemme 2.1. *Soient f_1 et f_2 deux polynômes non dégénérés respectivement pour Δ_1 et Δ_2 . Alors le polynôme $f = (f_1, f_2)$ est non dégénéré pour Δ .*

Démonstration. Rappelons que si f est un polynôme de polyèdre de Newton Δ , et σ une face du polyèdre Δ , le polynôme f_σ est la somme des monômes de f dont le support est dans σ . Alors f est non dégénéré quand pour toute face de Δ ne contenant pas l'origine, les polynômes $\frac{\partial f_\sigma}{\partial x_i}$, $1 \leq i \leq n_1 + n_2$ n'ont pas de zéro commun dans $(\bar{k}^\times)^{n_1+n_2}$. Mais d'après le lemme 1.1, toute face de Δ ne contenant

pas l'origine est de la forme $\sigma_1 \oplus \sigma_2$, pour σ_1 une face de Δ_1 (*resp.* σ_2 une face de Δ_2). Il est facile de vérifier que $f_\sigma(\mathbf{x}) = f_{1,\sigma_1}(\mathbf{x}_1) + f_{2,\sigma_2}(\mathbf{x}_2)$, et qu'on a

$$\frac{\partial f_\sigma}{\partial x_i} = \begin{cases} \frac{\partial f_{1,\sigma_1}}{\partial x_i} & \text{pour } 1 \leq i \leq n_1 \\ \frac{\partial f_{2,\sigma_2}}{\partial x_i} & \text{pour } n_1 + 1 \leq i \leq n_1 + n_2 \end{cases}$$

Donc $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ est un zéro commun des $\frac{\partial f_\sigma}{\partial x_i}$, $1 \leq i \leq n_1 + n_2$ quand \mathbf{x}_1 est un zéro commun des $\frac{\partial f_{1,\sigma_1}}{\partial x_i}$, $1 \leq i \leq n_1$ et \mathbf{x}_2 est un zéro commun des $\frac{\partial f_{2,\sigma_2}}{\partial x_i}$, $n_1 + 1 \leq i \leq n_1 + n_2$. C'est à dire que la non dégénérescence de f_1 et f_2 assure celle de f . \square

Soit ψ un caractère additif non trivial sur k , et \mathcal{L}_ψ le $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ -faisceau sur \mathbb{A}_k^1 associé à ψ et au recouvrement d'Artin-Schreier $y^q - y = x$. De même on note χ un caractère de k^\times et \mathcal{L}_χ le $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ -faisceau sur $\mathbb{G}_{m,k}$ associé.

Si X est un schéma de type fini sur k , f une fonction régulière sur X (c'est à dire un morphisme $f : X \rightarrow \mathbb{A}^1$), et g une fonction régulière qui ne s'annule pas sur X , on peut construire comme dans l'introduction la fonction $L(X, f, g; T)$, et la formule des traces de Grothendieck nous permet de la réinterpréter à l'aide des polynômes caractéristiques de l'action du Frobenius sur les groupes de cohomologie du faisceau $f^* \mathcal{L}_\psi \otimes g^* \mathcal{L}_\chi$

$$L(X, f, g; T) = \prod_i \det(I - TF | H_c^i(X \otimes \bar{k}, f^* \mathcal{L}_\psi \otimes g^* \mathcal{L}_\chi))^{(-1)^{i-1}}.$$

Revenons à la situation qui nous intéresse. On a ici les trois fonctions $f_i : \mathbb{G}_m^{n_i} \rightarrow \mathbb{A}^1$, $1 \leq i \leq 2$, et $f = (f_1, f_2) : \mathbb{G}_m^n \rightarrow \mathbb{A}^1$. On fixe un caractère χ_1 (*resp.* χ_2) de $(k^\times)^{n_1}$ (*resp.* $(k^\times)^{n_2}$), et on note χ le caractère (χ_1, χ_2) de $(k^\times)^n$. D'après la définition de f , on a, en notant pr_i les projections canoniques de $\mathbb{G}_m^n = \mathbb{G}_m^{n_1} \times \mathbb{G}_m^{n_2}$ sur chacun de ses facteurs, que $f^* \mathcal{L}_\psi \otimes \mathcal{L}_\chi = \bigotimes_{i=1}^2 \text{pr}_i^* (f_i^* \mathcal{L}_\psi \otimes \mathcal{L}_{\chi_i})$ est le produit tensoriel externe des deux faisceaux $f_i^* \mathcal{L}_\psi \otimes \mathcal{L}_{\chi_i}$. Alors la formule de Künneth nous assure qu'on a un isomorphisme

$$H_c^\bullet(\mathbb{G}_m^n, f^* \mathcal{L}_\psi \otimes \mathcal{L}_\chi) = H_c^\bullet(\mathbb{G}_m^{n_1}, f_1^* \mathcal{L}_\psi \otimes \mathcal{L}_{\chi_1}) \otimes H_c^\bullet(\mathbb{G}_m^{n_2}, f_2^* \mathcal{L}_\psi \otimes \mathcal{L}_{\chi_2}).$$

On a vu que f est non dégénéré quand f_1 et f_2 le sont ; dans ce cas l'isomorphisme précédent se réécrit simplement

$$H_c^n(\mathbb{G}_m^n, f^* \mathcal{L}_\psi \otimes \mathcal{L}_\chi) = H_c^{n_1}(\mathbb{G}_m^{n_1}, f_1^* \mathcal{L}_\psi \otimes \mathcal{L}_{\chi_1}) \otimes H_c^{n_2}(\mathbb{G}_m^{n_2}, f_2^* \mathcal{L}_\psi \otimes \mathcal{L}_{\chi_2})$$

d'après des résultats de Denef et Loeser [7, Theorem 1.3]. En d'autres termes, la fonction $L(f, \chi; T)^{(-1)^{n-1}}$ est le polynôme dont les racines réciproques sont les produits des couples de racines réciproques des polynômes $L(f_1, \chi_1; T)^{(-1)^{n_1-1}}$ et $L(f_2, \chi_2; T)^{(-1)^{n_2-1}}$.

Rappelons que pour un polynôme de Laurent f on note $\text{NP}_q(f, \chi)$ le polygone de Newton du polynôme $L(f, \chi; T)^{(-1)^{n-1}}$. On déduit en particulier des résultats précédents une factorisation de $\text{NP}_q(f, \chi)$ qui nous sera utile un peu plus loin.

Lemme 2.2. *On a l'égalité de polygones de Newton*

$$\text{NP}_q(f, \chi) = \text{NP}_q(f_1, \chi_1) \times \text{NP}_q(f_2, \chi_2).$$

Pour un polyèdre Δ de dimension n , et χ un caractère multiplicatif comme ci-dessus, on a défini le polygone de Newton générique $\text{GNP}(\Delta, \chi, p)$ comme la borne inférieure des polygones de Newton $\text{NP}_q(f, \chi)$ quand f parcourt l'ensemble des

polynômes de polyèdre Δ , non dégénérés. Quand Δ est une somme directe, on peut déduire des résultats précédents une borne pour ce polygone à l'aide des polygones de Newton génériques des facteurs de Δ .

Corollaire 2.1. *Soient Δ_1 et Δ_2 deux polyèdres convexes, et Δ leur somme directe. Alors on a*

$$\text{GNP}(\Delta_1, \chi_1, p) \times \text{GNP}(\Delta_2, \chi_2, p) \preceq \text{GNP}(\Delta, \chi, p).$$

Démonstration. Le théorème de spécialisation de Grothendieck (voir par exemple [11]) nous assure que pour chaque i , il existe un ouvert dense $\mathcal{U}_{\Delta_i, \chi_i, p}$ de \mathcal{M}_{Δ_i} , l'espace des coefficients des polynômes de polyèdre Δ_i , non dégénérés, tel que pour tout f_i de $\mathcal{U}_{\Delta_i, \chi_i, p}$, on ait $\text{NP}_q(f_i, \chi_i) = \text{GNP}(\Delta_i, \chi_i, p)$. D'après le lemme 2.1, si f_1 et f_2 sont tous deux non dégénérés, alors $f = (f_1, f_2)$ l'est aussi pour Δ , donc on a l'inclusion $\mathcal{M}_{\Delta_1} \times \mathcal{M}_{\Delta_2} \subset \mathcal{M}_{\Delta}$. On déduit du lemme 2.2 que la borne inférieure des polygones de Newton $\text{NP}_q(f, \chi)$ quand f parcourt $\mathcal{M}_{\Delta_1} \times \mathcal{M}_{\Delta_2}$ est le polygone $\text{GNP}(\Delta_1, \chi_1, p) \times \text{GNP}(\Delta_2, \chi_2, p)$ (atteinte pour tous les polynômes à coefficients dans $\mathcal{U}_{\Delta_1, \chi_1, p} \times \mathcal{U}_{\Delta_2, \chi_2, p}$). Mais d'après la définition de $\text{GNP}(\Delta, \chi, p)$ comme borne inférieure des $\text{NP}_q(f, \chi)$ quand f décrit \mathcal{M}_{Δ} , on obtient le résultat. \square

3. COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE, CAS ADDITIF.

On se place dans la situation suivante : on fixe un entier n , et on note $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ une base du \mathbb{Z} -module \mathbb{Z}^n . D'autre part on choisit des entiers naturels $d_1, d'_1, \dots, d_n, d'_n$ tels que pour chaque i on ait $(d_i, d'_i) \neq (0, 0)$ (sinon la situation qu'on va décrire peut se ramener en dimension inférieure). On note Δ le polyèdre convexe de \mathbb{R}^n qui est l'enveloppe convexe de l'ensemble des points $\{d_i \mathbf{e}_i, -d'_i \mathbf{e}_i\}_{1 \leq i \leq n}$ et de l'origine si nécessaire.

On se propose de démontrer le résultat suivant :

Théorème 3.1. *Quand p tend vers l'infini, le polygone de Newton générique de Δ associé au premier p , $\text{GNP}(\Delta, p)$, tend vers le polygone de Hodge $\text{HP}(\Delta)$.*

La démonstration, qu'on effectuera un peu plus loin, est une conséquence des résultats précédents et d'un cas déjà connu de ce théorème, en dimension 1. Commençons par rappeler ce qu'on sait en dimension 1 ; le lecteur intéressé par les détails pourra se référer aux articles [4], [15], [20].

Soit f un polynôme de Laurent en la variable x , $f(x) = \sum_{i=-d'}^d a_i x^i$, $a_{-d'} a_d \neq 0$. Il est clair que le polyèdre convexe associé à f est le segment de \mathbb{R} d'extrémités $-d'$ et d ; le poids est donné, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, par $w(n) = \max(\frac{n}{d}, -\frac{n}{d'})$. On déduit de la définition que le polygone de Hodge $\text{HP}([-d', d])$ est le polygone d'extrémités l'origine et le point de coordonnées $(d + d', \frac{d+d'}{2})$, et possédant un segment de longueur 1 pour chacune des pentes suivantes

$$0, 1, \frac{1}{d}, \dots, \frac{d-1}{d}, \frac{1}{d'}, \dots, \frac{d'-1}{d'} \left(0, \frac{1}{d}, \dots, \frac{d-1}{d} \text{ si } d' = 0 \right).$$

Nous noterons désormais $s_1, \dots, s_{d+d'}$ ces pentes, rangées par ordre croissant. On en déduit en particulier une autre description du polygone $\text{HP}([-d', d])$: c'est le polygone issu de l'origine et passant par les points de coordonnées $(i, s_1 + \dots + s_i)$ pour $1 \leq i \leq d + d'$.

Comme dans [16], on sait associer à f un opérateur différentiel sur un espace de séries surconvergentes, ainsi qu'un opérateur de Frobenius, qui commutent, de façon à réinterpréter la fonction $L(f; T)$ comme le polynôme caractéristique de

l'opérateur de Frobenius agissant sur le premier espace de cohomologie de de Rham. On peut alors estimer, pour p assez grand, les parties principales des coefficients de cette matrice, et donner des congruences pour ses mineurs principaux, qui sont les coefficients de la fonction L .

Notons π l'unique racine du polynôme $X^{p-1} + p$ dans une clôture algébrique fixée du corps \mathbb{Q}_p des nombres p -adiques telle que $\psi(1) \equiv 1 + \pi[\pi^2]$. On a alors $\mathbb{Q}_p(\pi) = \mathbb{Q}_p(\zeta_p)$, et on pose $K = \mathbb{Q}_p(\zeta_p, \zeta_{q-1})$. On note, pour chaque élément a de k , \tilde{a} son relèvement de Teichmüller (si $a = 0$, alors $\tilde{a} = 0$, sinon la réduction de \tilde{a} modulo l'idéal maximal est a , et on a $\tilde{a} \in \mu_{q-1}$). Soit \tilde{f} le polynôme de $K[x, x^{-1}]$ obtenu à partir de f en relevant ses coefficients comme ci-dessus. Si on pose $L(f; T) = 1 + \sum_{i=1}^{d+d'} M_i T^i$, on obtient pour tout $1 \leq i \leq d + d'$ la congruence (dans K)

$$M_i \equiv u_i \mathbb{P}_{d,d',i}^{\rho,\rho'}(\tilde{a}_{-d'}, \dots, \tilde{a}_d) \pi^{aY_i} \pmod{\pi^{aY_i+1}},$$

où u_i est une unité de l'anneau de valuation de K , et les polynômes $\mathbb{P}_{d,d',i}^{\rho,\rho'}$ peuvent être choisis à coefficients dans \mathbb{Q} , ne dépendant que des degrés d et d' , et des restes ρ et ρ' respectifs des divisions euclidiennes de p par d et d' .

Si $0 \leq i_1 \leq d$ et $0 \leq i_2 < d'$ sont les deux entiers déterminés (de façon unique) par la condition

$$\{s_1, \dots, s_i\} = \{0\} \cup \left\{ \frac{j}{d}, 1 \leq j \leq i_1 \right\} \cup \left\{ \frac{j}{d'}, 1 \leq j \leq i_2 \right\},$$

alors on sait exprimer Y_i à l'aide du groupe symétrique sur i éléments, agissant sur l'ensemble $\{-i_2, \dots, 0, \dots, i_1\}$:

$$Y_i = \min_{\sigma \in S_i} \sum_{j=-i_2}^{i_1} \lceil w(pj - \sigma(j)) \rceil,$$

où $\lceil x \rceil$ désigne le plus petit entier supérieur ou égal à x .

On obtient donc une description assez précise de la situation en dimension 1 pour p fixé et choisi assez grand : d'une part le polygone de Newton générique (par rapport à la valuation v_q), $\text{GNP}([-d', d], p)$, qui a pour sommets l'origine et les $(i, \frac{Y_i}{p-1})_{1 \leq i \leq d+d'}$, et d'autre part le polynôme de Hasse

$$\mathcal{H}_{[-d', d]}^{\rho,\rho'}(\tilde{a}_{-d'}, \dots, \tilde{a}_d) := \prod_{i=1}^{d+d'} \mathbb{P}_{d,d',i}^{\rho,\rho'}(\tilde{a}_{-d'}, \dots, \tilde{a}_d),$$

qui définit une hypersurface de l'espace des polynômes de Laurent de degrés d, d' à coefficients dans \mathbb{F}_q . Tous les polynômes dont les coefficients ne sont pas dans cette hypersurface satisfont $\text{NP}_q(f) = \text{GNP}(d, d', p)$.

Quand p varie, il est aisé de vérifier que pour tout $1 \leq i \leq d + d'$, on a

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{Y_i}{p-1} = s_1 + \dots + s_i,$$

c'est à dire que le polygone de Newton générique converge vers le polygone de Hodge. Finalement, définissons le polynôme (à coefficients dans \mathbb{Q})

$$\mathcal{H}_{[-d', d]}(X_{-d'}, \dots, X_d) = \prod_{(\rho, \rho') \in (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times \times (\mathbb{Z}/d'\mathbb{Z})^\times} \mathcal{H}_{[-d', d]}^{\rho,\rho'}(X_{-d'}, \dots, X_d).$$

De plus si $f \in \overline{\mathbb{Q}}[x, x^{-1}]$ est un polynôme de Laurent de la forme $f(x) = \sum_{i=-d'}^d A_i x^i$, et si pour tout premier p on choisit \mathfrak{p} un premier au dessus de p dans le corps \mathbb{Q}_f engendré par les coefficients de f , on a $\lim_{p \rightarrow \infty} \text{NP}_q(f \bmod \mathfrak{p}) = \text{HP}([-d', d])$ dès que

$$\mathcal{H}_{[-d', d]}(A_{-d'}, \dots, A_d) \neq 0,$$

c'est à dire qu'il existe un ouvert dense \mathcal{U} , défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$, de l'espace des polynômes de polyèdre $[-d', d]$ en une variable à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}$, tel que pour tout f dans \mathcal{U} , la limite $\lim_{p \rightarrow \infty} \text{NP}_q(f \bmod \mathfrak{p})$ existe et coïncide avec le polygone de Hodge.

Nous sommes maintenant à même de démontrer le théorème 3.1.

Démonstration. Commençons par réduire le problème au cas où \mathbf{e}_i est le i -ème vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^n . On peut définir une action à gauche de $\mathbf{M}_n(\mathbb{Z})$ sur l'espace des polynômes de Laurent en n variables, qui au polynôme $f(\mathbf{x}) = \sum a_{\mathbf{i}} \mathbf{x}^{\mathbf{i}}$ et à la matrice M associe le polynôme ${}^M f(\mathbf{x}) = f({}^M \mathbf{x}) = \sum a_{\mathbf{i}} ({}^M \mathbf{x})^{\mathbf{i}} = \sum a_{\mathbf{i}} \mathbf{x}^{M\mathbf{i}}$, où ${}^M \mathbf{x}$ est le n -uplet de variables dont la i -ème est $\prod_{j=1}^n x_j^{m_{ji}}$, et $M\mathbf{i}$ désigne la multiplication usuelle de la matrice M par le vecteur (colonne) \mathbf{i} . D'autre part, si M est dans $\mathbf{GL}_n(\mathbb{Z})$, l'application $\mathbf{x} \mapsto {}^M \mathbf{x}$ est une bijection de $(k^\times)^n$, ainsi que pour toutes ses extensions. Donc on obtient $L({}^M f; T) = L(f; T)$.

Soit maintenant f un polynôme de Laurent de la forme $f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=-d'_i}^{d_i} a_{ij} \mathbf{x}^{j\mathbf{e}_i}$, dont le polyèdre convexe est Δ . En choisissant pour M la matrice de passage de la base $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ à la base canonique, on voit que ${}^M f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=-d'_i}^{d_i} a_{ij} x_j^j$, dont le polyèdre associé est l'enveloppe convexe des points de coordonnées

$$(d_1, 0, \dots, 0), (-d'_1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, d_n), (0, \dots, 0, -d'_n).$$

Mais ce dernier polyèdre est la somme directe des segments $[-d'_i, d_i]$, $1 \leq i \leq n$, et le corollaire 2.1 nous assure que

$$\text{GNP}([-d'_1, d_1], p) \times \dots \times \text{GNP}([-d'_n, d_n], p) \preceq \text{GNP}(\Delta, p).$$

D'autre part, d'après la proposition 1.2, on a $\text{HP}(\Delta) = \text{HP}([-d'_1, d_1]) \times \dots \times \text{HP}([d'_n, d_n])$. Le résultat découle maintenant du fait que pour chaque i , $\text{GNP}([-d'_i, d_i], p)$ tend vers $\text{HP}([-d'_i, d_i])$ quand p tend vers ∞ : le polygone $\text{GNP}(\Delta, p)$ est encadré entre deux polygones ayant la même limite. \square

Remarque 3.1. Dans le cas où $p \equiv 1$ modulo $\text{ppcm}(d, d')$, on sait (cf. [16]) que les polygones $\text{GNP}([-d', d], p)$ et $\text{HP}([-d', d])$ coïncident. En particulier, si $p \equiv 1$ modulo $D = \text{ppcm}(d_i, d'_i)_{1 \leq i \leq n}$, on en déduit que les polygones $\text{GNP}(\Delta, p)$ et $\text{HP}(\Delta)$ coïncident, et la conjecture d'Adolphson et Sperber [1, p. 386] est vérifiée dans ce cas.

Considérons maintenant la seconde question, à savoir l'existence d'un ouvert dense \mathcal{U}_Δ défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$ de l'espace des polynômes à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}$ de polyèdre de Newton Δ tel que pour tout f de \mathcal{U}_Δ , on ait $\lim_{p \rightarrow \infty} \text{NP}_q(f \bmod \mathfrak{p}) = \text{HP}(\Delta)$, où \mathfrak{p} est un premier au dessus de p dans le corps \mathbb{Q}_f engendré par les coefficients de f . Comme on ne considère pas tous les polynômes de polyèdre Δ , on ne peut répondre à cette question. En revanche, pour les sous-familles que nous avons utilisées, on obtient le résultat suivant :

Théorème 3.2. *Il existe un ouvert dense \mathcal{U} défini sur \mathbb{Q} de l'espace des polynômes de la forme $f(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=-d'_i}^{d_i} A_{ij} \mathbf{x}^{j\mathbf{e}_i}$ à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}$ tel que pour tout polynôme dans \mathcal{U} , on ait*

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \text{NP}_q(f \bmod \mathfrak{p}) = \text{HP}(\Delta).$$

Démonstration. Pour un polynôme de la forme $f(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=-d'_i}^{d_i} a_{ij} \mathbf{x}^{j\mathbf{e}_i}$, on a $\text{NP}_q(f \bmod \mathfrak{p}) = \text{GNP}([-d'_1, d'_1], p) \times \cdots \times \text{GNP}([-d'_n, d'_n], p)$ si et seulement si les coefficients de f vérifient

$$\prod_{k=1}^n \mathcal{H}_{[-d'_k, d'_k]}^{\rho_k, \rho'_k}(A_{k, -d'_k}, \dots, A_{k, d'_k}) \not\equiv 0 \pmod{p},$$

où ρ_k (resp. ρ'_k) est le reste de la division euclidienne de p par d_k (resp. par d'_k). Notons \mathcal{H}^ρ ce polynôme, avec $\rho = (\rho_1, \rho'_1, \dots, \rho_n, \rho'_n)$. Comme on sait que les polynômes $\mathcal{H}_{[-d'_k, d'_k]}^{\rho_k, \rho'_k}$ peuvent être choisis à coefficients dans \mathbb{Q} , \mathcal{H}^ρ est à coefficients dans \mathbb{Q} , et si

$$\mathcal{H}(X_{ij}) = \prod_{\rho \in (\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z})^\times \times \cdots \times (\mathbb{Z}/d'_n\mathbb{Z})^\times} \mathcal{H}^\rho(X_{ij}) = \prod_{i=1}^n \mathcal{H}_{[-d'_i, d'_i]}(X_{ij}),$$

on voit que pour tout f dont les coefficients sont hors de l'hypersurface d'équation $\mathcal{H} = 0$, on a pour tout p assez grand

$$\text{NP}_q(f \bmod \mathfrak{p}) = \text{GNP}([-d'_1, d'_1], p) \times \cdots \times \text{GNP}([-d'_n, d'_n], p),$$

et le résultat découle de la convergence de ce dernier polygone vers $\text{HP}(\Delta)$. \square

4. COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE, CAS MIXTE.

Dans cette section, on note encore $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ une base du \mathbb{Z} -module \mathbb{Z}^n , et Δ le polyèdre convexe de \mathbb{R}^n qui est l'enveloppe convexe de l'ensemble des points $\{d_i \mathbf{e}_i, -d'_i \mathbf{e}_i\}_{1 \leq i \leq n}$ et de l'origine si nécessaire. On va étudier le comportement asymptotique de polygones de Newton de la forme $\text{NP}_q(f, \chi)$ pour f comme plus haut, et χ un caractère multiplicatif de k^\times d'ordre fixé. Cette étude a été menée en dimension 1 dans [5], et nous allons la généraliser ici. Les résultats sont assez différents puisque qu'il n'y a plus de limite, mais une limite pour chaque classe inversible modulo l'ordre du caractère.

Dans le cas où le caractère multiplicatif χ n'est pas trivial, la situation est assez différente. Soit ω le caractère de Teichmüller de k^\times , qui est un générateur de groupe des caractères de k^\times . Pour un n -uplet d'entiers $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \dots, \delta_n)$, on note $\chi = \omega^{\boldsymbol{\delta}}$ le caractère de $(k^\times)^n$ défini par $\chi(x_1, \dots, x_n) = \omega(x_1)^{\delta_1} \cdots \omega(x_n)^{\delta_n}$. Soit f un polynôme de polyèdre de Newton Δ (qu'on suppose engendrer \mathbb{R}^n), non dégénéré. Adolphson et Sperber ont montré que la fonction $L(f, \chi; T)^{(-1)^{n-1}}$ est un polynôme de degré $n!V(\Delta)$; ils ont aussi donné une borne inférieure pour son polygone de Newton [3, Theorem 3.17], qu'on appellera dans la suite *polygone de Hodge associé à Δ et $\boldsymbol{\delta}$* , et qu'on notera $\text{HP}(\Delta, \frac{\boldsymbol{\delta}}{q-1})$.

Nous allons décrire ce polygone, dans le cas où le polyèdre Δ engendre l'espace \mathbb{R}^n . Pour deux entiers i et $0 \leq \delta \leq q-2$, on note $\delta^{(i)}$ le reste modulo $q-1$ de l'entier $p^i \delta$; remarquons que la suite $(\delta^{(i)})_i$ est périodique : on a $\delta^{(a)} = \delta$, où $a = \log_p q$. On note encore $\boldsymbol{\delta}^{(i)} = (\delta_1^{(i)}, \dots, \delta_n^{(i)})$.

Soit maintenant $N^{(i)}$ le réseau $\frac{\delta^{(i)}}{q-1} + \mathbb{Z}^n$ de \mathbb{R}^n . On note $M_{\Delta, \delta^{(i)}} := C(\Delta) \cap N^{(i)}$, et $\mathcal{A}_{\Delta, \delta^{(i)}}$ le \mathcal{A}_{Δ} -module $k[x^{M_{\Delta, \delta^{(i)}}}]$. Il existe alors un entier positif D , minimal, tel que l'image de $M_{\Delta, \delta^{(i)}}$ par w_{Δ} soit contenue dans $\frac{1}{D}\mathbb{N}$; on appellera cet entier le *dénominateur de $(\Delta, \delta^{(i)})$* dans la suite. Muni de ce poids, $\mathcal{A}_{\Delta, \delta^{(i)}}$ devient un \mathcal{A}_{Δ} -module gradué, auquel on peut associer une série de Poincaré et un polynôme $P_{\Delta, \delta^{(i)}}$ comme plus haut. Notons $\Pi^{(i)}$ le polygone issu de cette série. De plus chacun des polynômes $P_{\Delta, \delta^{(i)}}$ est de degré plus petit que nD , et vérifie $P_{\Delta, \delta^{(i)}}(1) = n!V(\Delta)$. On a ainsi une famille de polygones $\Pi^{(i)}$ pour $0 \leq i \leq a$, tous de même longueur $n!V(\Delta)$.

Si Π et Π' sont deux polygones de même longueur, on note $\Pi + \Pi'$ le polygone dont la pente sur le segment $[i, i+1]$ est la somme des pentes de Π et Π' sur ce segment; d'autre part, pour un réel $r > 0$, on désigne par $r\Pi$ le polygone obtenu à partir de Π en multipliant toute ses pentes par r (c'est en fait l'image de Π par l'affinité orthogonale d'axe Ox , de direction Oy et de rapport r). Avec ces notations, on sait alors décrire le polygone de Hodge

$$\text{HP}(\Delta, \frac{\delta}{q-1}) = \frac{1}{a} \sum_{i=0}^{a-1} \Pi^{(i)} ;$$

On sait maintenant exprimer le polygone de Hodge associé à une somme directe de polyèdres et à deux caractères multiplicatifs, à l'aide des polygones de Hodge associés à ses facteurs. C'est l'exacte transposition de la proposition 1.2 dans ce nouveau cadre, et nous en omettons la démonstration, qui est très similaire au cas du polygone de Hodge de l'algèbre \mathcal{A}_{Δ} .

Proposition 4.1. *Soient Δ_1 et Δ_2 deux polyèdres convexes, respectivement dans \mathbb{R}^{n_1} et \mathbb{R}^{n_2} , et Δ leur somme directe. Si on pose*

$$\delta_1 = (\delta_1, \dots, \delta_{n_1}), \quad \delta_2 = (\delta_{n_1+1}, \dots, \delta_{n_1+n_2}), \quad \text{et } \delta = (\delta_1, \delta_2) = (\delta_1, \dots, \delta_{n_1+n_2}),$$

alors le polygone de Hodge $\text{HP}(\Delta, \frac{\delta}{q-1})$ est le produit des polygones de Hodge de ses facteurs

$$\text{HP}(\Delta, \frac{\delta}{q-1}) = \text{HP}(\Delta_1, \frac{\delta_1}{q-1}) \times \text{HP}(\Delta_2, \frac{\delta_2}{q-1}).$$

Le cas de la dimension 1 a été étudié dans [5]; le lecteur intéressé par les preuves des résultats que nous allons rappeler maintenant pourra s'y référer. Dans ce cas, le polygone de Hodge fait intervenir à la fois le polygone de Hodge des sommes associées à un caractère additif, et la valuation de la somme de Gauss associée à χ , donnée par le théorème de Stickelberger; pour cette raison nous avons choisi de renommer ce polygone *polygone de Hodge Stickelberger*, en changeant légèrement les notations.

Pour justifier ces changements, commençons par expliquer le point de vue de [5] plus précisément. Les auterus sont motivés par l'étude du comportement asymptotique dans un cas non générique des polynômes de Laurent en une variable (plus particulièrement par le cas des polynômes de la forme $f(x^s)$). La formule de Poisson ramène ce problème à la situation suivante : le polynôme de Laurent $f \in k[x, x^{-1}]$ admet pour polyèdre de Newton le segment $[-d', d]$, et χ est un caractère multiplicatif d'ordre divisant s . Ce dernier n'est pas nécessairement défini sur k , mais sur une de ses extensions k' de cardinal $q' \equiv 1$ modulo s . Si ω' est le caractère de Teichmüller de k'^{\times} , on peut donc écrire $\chi = \omega'^{\delta}$, avec $\delta = \frac{(q'-1)r}{s}$ pour un certain

entier $1 \leq r \leq s-1$. Alors le polygone de Hodge $\text{HP}([-d', d], \frac{\delta}{q'-1})$ est le polygone d'extrémités l'origine et le point de coordonnées $(d + d', \frac{d+d'}{2})$, et possédant un segment de longueur 1 pour chacune des pentes suivantes

$$\frac{1-\lambda}{d}, \dots, \frac{d-\lambda}{d}, \frac{\lambda}{d'}, \dots, \frac{d'-1+\lambda}{d'} \left(\frac{1-\lambda}{d}, \dots, \frac{d-\lambda}{d} \text{ si } d' = 0 \right),$$

où, comme dans le théorème de Stickelberger donnant la valuation des sommes de Gauss, $\lambda = \frac{1}{\log_p(q')(p-1)} s_p \left(\frac{(q'-1)r}{s} \right)$ avec s_p la somme des chiffres de l'écriture en base p de l'entier $\frac{(q'-1)r}{s}$. En particulier, λ ne dépend pas du choix de q' .

On sait réexprimer λ de la façon suivante : si σ_p désigne la permutation de l'ensemble $\{0, \dots, s-1\}$ induite par la multiplication par p dans $\mathbb{Z}/s\mathbb{Z}$, et si σ est le cycle, de longueur ℓ , de σ_p contenant r , alors on a $\lambda = \frac{\sum_{j \in \sigma} j}{s\ell}$. Donc λ ne dépend pas de p , mais de son reste modulo s .

Définition 4.1. *Le polygone qu'on vient de décrire est le polygone de Hodge Stickelberger associé au polyèdre $[-d', d]$ et au rationnel $\frac{r}{s}$. On le note $\text{HS}([-d', d], \frac{r}{s}, \nu)$, où ν est le reste de p modulo s .*

Ici encore, on a un polygone de Newton générique $\text{GNP}([-d', d], \chi, p)$, et un polynôme de Hasse à coefficients rationnels ; ils sont eux aussi indépendants de la puissance de p choisie. De plus, le polynôme de Hasse ne dépend que des restes respectifs ν, ρ et ρ' de p modulo s , d et d' ; notons le $\mathcal{H}_{[-d', d], \frac{r}{s}, \nu}^{\rho, \rho'}$.

On voit que la principale différence avec les sommes additives est que, pour un polyèdre fixé, il y a plusieurs polygones de Hodge-Stickelberger, dépendant du reste de la division euclidienne de p par l'ordre du caractère multiplicatif χ .

En conséquence, on ne peut plus espérer que les polynômes de Newton génériques convergent quand p tend vers $+\infty$. En revanche, quand p tend vers $+\infty$ le "long d'une classe de $(\mathbb{Z}/s\mathbb{Z})^\times$ ", on obtient la convergence :

$$\lim_{\substack{p \rightarrow +\infty \\ p \equiv \nu \pmod{s}}} \text{GNP}([-d', d], \chi, p) = \text{HS}([-d', d], \frac{r}{s}, \nu).$$

D'autre part, en définissant $\mathcal{H}_{[-d', d], \frac{r}{s}, \nu} = \prod_{\rho, \rho'} \mathcal{H}_{[-d', d], \frac{r}{s}, \nu}^{\rho, \rho'}$, on sait que pour tout polynôme $f \in \overline{\mathbb{Q}}[x, x^{-1}]$, de la forme $f(x) = \sum_{i=-d'}^d A_i x^i$, et vérifiant

$$\mathcal{H}_{[-d', d], \frac{r}{s}, \nu}(A_{-d'}, \dots, A_d) \neq 0,$$

on a $\lim_{\substack{p \rightarrow +\infty \\ p \equiv \nu \pmod{s}}} \text{NP}_q(f \bmod \mathfrak{p}, \chi) = \text{HS}([-d', d], \frac{r}{s}, \nu)$ (où comme plus haut \mathfrak{p} est un premier au dessus de p dans le corps \mathbb{Q}_f engendré par les coefficients de f). C'est à dire qu'il existe un ouvert dense $\mathcal{U}_{\frac{r}{s}, \nu}$, défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$, de l'espace des polynômes de polyèdre $[-d', d]$ en une variable à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}$, tel que pour tout f dans $\mathcal{U}_{\frac{r}{s}, \nu}$, la limite $\lim_{\substack{p \rightarrow +\infty \\ p \equiv \nu \pmod{s}}} \text{NP}_q(f \bmod \mathfrak{p}, \chi)$ existe et coïncide avec le polygone de Hodge-Stickelberger.

On peut maintenant passer de la dimension 1 à la dimension supérieure. Commençons par définir les polygones de Hodge-Stickelberger dans ce cadre :

Définition 4.2. *On pose, pour Δ un polyèdre convexe, $\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{s}} = (\frac{r_1}{s_1}, \dots, \frac{r_n}{s_n})$, p un premier de résidu ν modulo $s = \text{ppcm}(s_1, \dots, s_n)$ et q une puissance de p telle que*

$q \equiv 1 \pmod s$

$$\text{HS}(\Delta, \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{s}}, \nu) := \text{HP}(\Delta, \frac{\delta}{q-1})$$

avec $\delta = \left(\frac{(q-1)r_1}{s_1}, \dots, \frac{(q-1)r_n}{s_n} \right)$.

Remarque 4.1. On vérifie aisément, à l'aide de la définition qu'on en a donné, que ce polygone ne dépend pas de q , la puissance de p qu'on choisit. D'autre part il ne dépend ici encore que du reste de p modulo s , ce qui justifie notre notation.

La proposition 4.1 s'applique de la façon suivante aux polygones de Hodge-Stickleberger; si

- i/ Δ_1 et Δ_2 sont deux polyèdres convexes, et $\Delta = \Delta_1 \oplus \Delta_2$ leur somme directe;
- ii/ $\frac{\mathbf{r}_1}{\mathbf{s}_1}, \frac{\mathbf{r}_2}{\mathbf{s}_2}$ et $\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{s}} = \left(\frac{\mathbf{r}_1}{\mathbf{s}_1}, \frac{\mathbf{r}_2}{\mathbf{s}_2} \right)$ des n_1, n_2 et n -uplets de rationnels;
- iii/ ν un résidu inversible modulo $s := \text{ppcm}(s_1, s_2)$, et ν_i son image modulo s_i ,
alors

$$\text{HS}(\Delta, \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{s}}, \nu) = \text{HS}(\Delta_1, \frac{\mathbf{r}_1}{\mathbf{s}_1}, \nu_1) \times \text{HS}(\Delta_2, \frac{\mathbf{r}_2}{\mathbf{s}_2}, \nu_2).$$

On rappelle que $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ est une base du \mathbb{Z} -module \mathbb{Z}^n , et que Δ désigne le polyèdre convexe de \mathbb{R}^n qui est l'enveloppe convexe de l'ensemble des points $\{d_i \mathbf{e}_i, -d'_i \mathbf{e}_i\}_{1 \leq i \leq n}$ et de l'origine si nécessaire. D'autre part, on choisit, pour chaque premier p assez grand, un caractère multiplicatif $\chi_i = \omega_{q-1}^{\frac{(q-1)r_i}{s_i}}$ pour $1 \leq i \leq n$, avec q une puissance convenable de p . On note $\chi = (\chi_1, \dots, \chi_n)$ le caractère de $(\mathbb{F}_q^\times)^n$ induit par les χ_i , et $\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{s}} = (\frac{r_1}{s_1}, \dots, \frac{r_n}{s_n})$. Alors le polygone

$$\text{HS}(\Delta, \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{s}}, \nu) := \text{HS}([-d'_1, d_1], \frac{r_1}{s_1}, \nu_1) \times \dots \times \text{HS}([-d'_n, d_n], \frac{r_n}{s_n}, \nu_n)$$

ne dépend que du reste de la division euclidienne de p par $s := \text{ppcm}(s_1, \dots, s_n)$. A l'aide de ces notations, les transpositions des théorèmes 3.1 et 3.2 à cette nouvelle situation s'écrivent :

Théorème 4.1. Quand p tend vers l'infini, le polygone de Newton générique de Δ associé au premier p et au caractère χ , $\text{GNP}(\Delta, \chi, p)$, tend vers le polygone de Hodge-Stickleberger $\text{HS}(\Delta, \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{s}}, \nu)$ quand p tend vers $+\infty$ avec $p \equiv \nu \pmod s$.

Théorème 4.2. Il existe un ouvert dense \mathcal{U} défini sur \mathbb{Q} de l'espace des polynômes de la forme $f(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=-d'_i}^{d_i} a_{ij} \mathbf{x}^j \mathbf{e}_i$ à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}$ tel que pour tout polynôme dans \mathcal{U} , on ait

$$\lim_{\substack{p \rightarrow +\infty \\ p \equiv \nu \pmod s}} \text{NP}_q(f \pmod{\mathfrak{p}}, \chi_p) = \text{HS}(\Delta, \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{s}}, \nu).$$

Remarque 4.2. Dans le cas où $p \equiv 1$ modulo $\text{ppcm}(d, d', s)$, on sait (cf. [5]) que les polygones $\text{GNP}([-d', d], \chi, p)$ et $\text{HS}([-d', d], \frac{r}{s}, 1)$ coïncident. En particulier, si $p \equiv 1$ modulo $D = \text{ppcm}(d_i, d'_i, s_i)_{1 \leq i \leq n}$, on en déduit que les polygones $\text{GNP}(\Delta, \chi, p)$ et $\text{HP}(\Delta, \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{s}}, 1)$ coïncident, et on a vérifié dans ce cas une extension de la conjecture d'Adolphson et Sperber aux sommes mixtes.

Nous terminons ce chapitre par le cas particulier $s = 2$. Pour un nombre premier impair p fixé, on note χ_2 le caractère quadratique, défini sur \mathbb{F}_q^\times par $\chi_2(x) = \omega^{\frac{q-1}{2}}(x)$. Tous les caractères multiplicatifs d'ordre 2 de $(\mathbb{F}_q^\times)^n$ sont de la forme χ_2^ε , avec $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^n$, et $\chi_2^\varepsilon(x_1, \dots, x_n) = \chi_2^{\varepsilon_1}(x_1) \dots \chi_2^{\varepsilon_n}(x_n)$. Puisque

(presque) tous les premiers sont impairs, le polygone de Hodge-Stickelberger ne dépend plus que de ε , on le note $\text{HS}(\Delta, \frac{\varepsilon}{2})$. Pour la même raison, on peut décrire directement ce polygone à l'aide d'une série de Poincaré.

Lemme 4.1. *Soit Δ un polyèdre convexe de \mathbb{R}^n qui l'engendre, $\mathcal{A}_{\Delta, \frac{\varepsilon}{2}}$ le \mathcal{A}_{Δ} -module gradué associé à cette situation. Alors le polygone $\text{HS}(\Delta, \frac{\varepsilon}{2})$ est le polygone issu de la série de Poincaré de $\mathcal{A}_{\Delta, \frac{\varepsilon}{2}}$.*

L'indépendance du polygone de Hodge par rapport à p nous permet de retrouver l'existence d'une limite.

Corollaire 4.1. *Quand p tend vers l'infini, le polygone de Newton générique de Δ associé au premier p et au caractère quadratique χ_2 , $\text{GNP}(\Delta, \chi_2, p)$, tend vers le polygone de Hodge-Stickelberger $\text{HS}(\Delta, \frac{\varepsilon}{2})$ quand p tend vers $+\infty$.*

Corollaire 4.2. *Il existe un ouvert dense \mathcal{U} défini sur \mathbb{Q} de l'espace des polynômes de la forme $f(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=-d'_i}^{d_i} a_{ij} \mathbf{x}^{j\mathbf{e}_i}$ à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}$ tel que pour tout polynôme dans \mathcal{U} , on ait*

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \text{NP}_q(f \mod \mathfrak{p}, \chi_2) = \text{HS}(\Delta, \frac{\varepsilon}{2}).$$

5. POLYNÔMES DE POLYÈDRES D'EXPOSANT DEUX.

Dans cette partie on va étendre les principaux résultats à des polyèdres un peu plus généraux : on fixe un entier n , et on note $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$ une famille libre de \mathbb{Z}^n , qui engendre un sous module N tel que le quotient \mathbb{Z}^n/N soit un groupe d'exposant 2. Comme dans les chapitres précédents on choisit des entiers naturels $d_1, d'_1, \dots, d_n, d'_n$. On note Δ le polyèdre convexe de \mathbb{R}^n qui est l'enveloppe convexe de l'ensemble des points $\{d_i \mathbf{f}_i, -d'_i \mathbf{f}_i\}_{1 \leq i \leq n}$ et de l'origine si nécessaire. On va réexprimer les sommes additives associées à certains polynômes de polyèdre Δ à l'aide de sommes mixtes étudiées dans le chapitre précédent ; on utilisera ensuite les corollaires 4.1 et 4.2 pour obtenir la limite.

On se propose de démontrer les résultats suivants :

Théorème 5.1. *Quand p tend vers l'infini, le polygone de Newton générique de Δ associé au premier p , $\text{GNP}(\Delta, p)$, tend vers le polygone de Hodge $\text{HP}(\Delta)$.*

Théorème 5.2. *Il existe un ouvert dense \mathcal{U} défini sur \mathbb{Q} de l'espace des polynômes de la forme $f(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=-d'_i}^{d_i} a_{ij} \mathbf{x}^{j\mathbf{f}_i}$ à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}$ tel que pour tout polynôme dans \mathcal{U} , on ait*

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \text{NP}_q(f \mod \mathfrak{p}) = \text{HP}(\Delta).$$

Dans toute la suite, on suppose que p est un nombre premier impair.

Soit $\mathcal{F} = (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$ une famille libre de \mathbb{Z}^n , qui engendre un sous module N de \mathbb{Z}^n tel que le quotient \mathbb{Z}^n/N soit un groupe d'exposant 2. On note $M = (f_{ij})$ la matrice de passage de la base canonique à la famille \mathcal{F} dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{Z})$, et k la dimension comme \mathbb{F}_2 -espace vectoriel de \mathbb{Z}^n/N . On a donc la suite exacte

$$(1) \quad 0 \rightarrow \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n/N \simeq \mathbb{F}_2^k \rightarrow 0,$$

où la première flèche est l'action de M .

On peut trouver une base $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ de \mathbb{Z}^n (comme \mathbb{Z} -module) telle que la famille $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-k}, 2\mathbf{e}_{n-k+1}, \dots, 2\mathbf{e}_n$ soit une base de N . De façon équivalente,

la matrice M est équivalente, sur $\mathbf{M}_n(\mathbb{Z})$, à la matrice diagonale dont les $n - k$ premiers coefficients diagonaux valent 1, et les k derniers valent 2 ; remarquons qu'on doit avoir $\det M = 2^k$.

Définition 5.1. On note M_2 l'application linéaire de \mathbb{F}_2^n induite par la réduction modulo 2 de la matrice M . Soit \overline{E} son noyau, et pour tout $\overline{\varepsilon} = (\overline{\varepsilon}_1, \dots, \overline{\varepsilon}_n) \in \overline{E}$, on note $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ le relèvement de $\overline{\varepsilon}$ à $\{0, 1\}^n$. Finalement, soit E le sous-ensemble de $\{0, 1\}^n$ formé des ε quand $\overline{\varepsilon}$ décrit \overline{E} .

L'ensemble E qu'on vient de définir va nous servir à décrire les points entiers d'un domaine fondamental de \mathbb{Z}^n/N . D'autre part, rappelons que si $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, on note ${}^M\mathbf{x} = (y_1, \dots, y_n)$, avec $y_i = \prod_{j=1}^n x_j^{f_{ji}}$. L'ensemble E va aussi nous servir à décrire l'image du morphisme $\varphi_M : \mathbf{x} \mapsto {}^M\mathbf{x}$ de $k^{\times n}$ dans lui-même, et à réexprimer les sommes pures, (ainsi que leurs fonctions L et groupes de cohomologie) associées au polynôme $f({}^M\mathbf{x})$ en fonction de sommes mixtes associées au polynôme f et à certains caractères quadratiques. On rappelle qu'on note χ_2^ε , avec $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^n$, le caractère (multiplicatif) de $k^{\times n}$ défini par $\chi_2^\varepsilon(x_1, \dots, x_n) = \chi_2^{\varepsilon_1}(x_1) \dots \chi_2^{\varepsilon_n}(x_n)$.

Lemme 5.1. *i/ L'ensemble des points entiers contenus dans le polyèdre*

$$[0, 1[\mathbf{f}_1 \times \dots \times [0, 1[\mathbf{f}_n = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{f}_i, 0 \leq x_i < 1 \right\}$$

$$\text{est } \{f_\varepsilon := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \mathbf{f}_i, \varepsilon \in E\}.$$

ii/ Le sous-groupe du groupe des caractères multiplicatifs de $k^{\times n}$ orthogonal à l'image du morphisme φ_M est

$$(\text{Im } \varphi_M)^\perp = \{\chi_2^\varepsilon, \varepsilon \in E\}.$$

Démonstration. Le polyèdre $[0, 1[\mathbf{f}_1 \times \dots \times [0, 1[\mathbf{f}_n$ est un domaine fondamental pour l'action de N sur \mathbb{R}^n par translations. En particulier il contient $\det M = 2^k$ points entiers. Puisque M_2 est de rang k , E contient 2^k éléments, et il suffit de vérifier que les points $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \mathbf{f}_i$ sont entiers. Mais par construction l'image de $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \mathbf{f}_i$ dans \mathbb{F}_2^n est nulle, c'est à dire que toutes les coordonnées de $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \mathbf{f}_i$ sont paires, et on a prouvé l'assertion *i/*.

On a supposé p impair, et le groupe $k^{\times n}$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z})^n$, avec $q-1$ pair. En tensorisant la suite exacte (1) par le groupe $\mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$, on obtient donc la suite exacte

$$(2) \quad (\mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z})^n \rightarrow (\mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z})^n \rightarrow \mathbb{F}_2^k \rightarrow 0.$$

Ainsi l'image du morphisme φ_M est d'indice 2^k dans $k^{\times n}$, et il suffit encore une fois de montrer une inclusion. Un calcul facile montre que $\chi_2^\varepsilon({}^M\mathbf{x}) = \chi_2^{\varepsilon_1}(x_1) \dots \chi_2^{\varepsilon_n}(x_n)$, où e_i est la i -ème coordonnée du vecteur $M\varepsilon$. Mais comme plus haut, quand ε est dans E , le vecteur $M\varepsilon$ a toutes ses coordonnées paires. Donc χ_2^ε est dans l'orthogonal de l'image de φ_M , ce qui termine la démonstration. \square

Nous pouvons maintenant réexprimer les sommes pures associées à un polynôme de Laurent de la forme $f({}^M\mathbf{x})$.

Proposition 5.1. *Soit $f \in k[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]$ un polynôme de Laurent, et M comme précédemment ; on rappelle que ${}^M f$ est le polynôme de Laurent $f({}^M x)$. On a les décompositions suivantes*

i/ des sommes de caractères

$$\sum_{\mathbf{x} \in k_r^{\times n}} \psi({}^M f(\mathbf{x})) = \sum_{\varepsilon \in E} \sum_{\mathbf{x} \in k_r^{\times n}} \psi(f(\mathbf{x})) \chi_2^\varepsilon(\mathbf{x}) ;$$

ii/ de la fonction L

$$L({}^M f, T) = \prod_{\varepsilon \in E} L(f, \chi_2^\varepsilon, T) ;$$

iii/ de la suite exacte longue de cohomologie

$$H_c^\bullet(\mathbb{G}_m^n, ({}^M f)^* \mathcal{L}_\psi) = \bigoplus_{\varepsilon \in E} H_c^\bullet(\mathbb{G}_m^n, f^* \mathcal{L}_\psi \otimes \mathcal{L}_{\chi_2^\varepsilon}).$$

Démonstration. Ce sont différents avatars de la formule de Poisson appliquée à notre situation. Montrons le premier : à l'aide de l'assertion ii/ du lemme 5.1, on a

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{x} \in k^{\times n}} \psi(f({}^M \mathbf{x})) &= \#\text{Ker} \varphi_M \sum_{\mathbf{y} \in \text{Im} \varphi_M} \psi(f(\mathbf{y})) \\ &= \#\text{Ker} \varphi_M \left(\frac{1}{\#(\text{Im} \varphi_M)^\perp} \sum_{\chi \in (\text{Im} \varphi_M)^\perp} \sum_{\mathbf{x} \in k^{\times n}} \psi(f(\mathbf{x})) \chi_2^\varepsilon(\mathbf{x}) \right) \\ &= \sum_{\varepsilon \in E} \sum_{\mathbf{x} \in k_r^{\times n}} \psi(f(\mathbf{x})) \chi_2^\varepsilon(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

ce qui est exactement la formule recherchée. \square

On va en déduire une décomposition pour le polygone de Newton ; commençons par introduire une nouvelle opération sur les polygones :

Définition 5.2. Si Π_1 et Π_2 sont deux polygones convexes de pentes respectives $(s_i)_{1 \leq i \leq a}$ et $(s'_i)_{1 \leq i \leq b}$, leur juxtaposition est le polygone convexe $\Pi_1 \amalg \Pi_2$ de pentes $(s_i, s'_j)_{1 \leq i \leq a, 1 \leq j \leq b}$.

À l'aide de cette définition, on déduit de la proposition 5.1 l'écriture suivante :

Corollaire 5.1. Le polygone de Newton associé au polynôme ${}^M f$ est la juxtaposition des polygones de Newton associés au polynôme f et aux caractères χ_2^ε quand ε décrit E

$$\text{NP}_q({}^M f) = \prod_{\varepsilon \in E} \text{NP}_q(f, \chi_2^\varepsilon).$$

Nous allons maintenant réécrire le polygone de Hodge $\text{HP}(\Delta)$ à l'aide des polygones des sections précédentes :

Lemme 5.2. Soit Δ_0 le polyèdre convexe de \mathbb{R}^n qui est l'enveloppe convexe de l'ensemble des points $\{d_i \mathbf{e}_i, -d'_i \mathbf{e}_i\}_{1 \leq i \leq n}$ et de l'origine si nécessaire, pour $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ une base du \mathbb{Z} module \mathbb{Z}^n . On a la décomposition suivante du polygone de Hodge associé à Δ :

$$\text{HP}(\Delta) = \text{HP}(\Delta_0) \amalg \left(\prod_{\varepsilon \in E \setminus \{0, \dots, 0\}} \text{HS}(\Delta_0, \frac{\varepsilon}{2}) \right).$$

Démonstration. On va revenir ici à la définition du polygone de Hodge à l'aide des séries de Poincaré des algèbres \mathcal{A}_Δ et $\mathcal{A}_{\Delta_0, \frac{\varepsilon}{2}}$. Quitte à permuter les couples (d_i, d'_i) , et à échanger d_i et d'_i dans certains couples, on peut supposer que $d'_1 = \dots = d'_l = 0$ et que les d'_i sont tous non nuls pour $l+1 \leq i \leq n$. Alors d'après le lemme 5.1, les points de M_Δ sont les

$$\mathbf{f}_{\mathbf{k}, \varepsilon} := k_1 \mathbf{f}_1 + \dots + k_n \mathbf{f}_n + \mathbf{f}_\varepsilon, \quad \mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^l \times \mathbb{Z}^{n-l}, \quad \varepsilon \in E,$$

et le poids d'un tel point est donné par

$$w_{\Delta}(\mathbf{f}_{\mathbf{k},\varepsilon}) = \sum_{i=1}^l \frac{k_i + \frac{\varepsilon_i}{2}}{d_i} + \sum_{i=l+1}^n \max\left(\frac{k_i + \frac{\varepsilon_i}{2}}{d_i}, -\frac{k_i + \frac{\varepsilon_i}{2}}{d'_i}\right).$$

On en déduit, en notant D le dénominateur de Δ , que la série de Poincaré de l'algèbre \mathcal{A}_{Δ} s'écrit :

$$P_{\mathcal{A}_{\Delta}}(t) = \sum_{\varepsilon \in E} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^l \times \mathbb{Z}^{n-l}} t^{D w_{\Delta}(\mathbf{f}_{\mathbf{k},\varepsilon})}.$$

Fixons $\varepsilon \in E$. Les points de $M_{\Delta_0, \frac{\varepsilon}{2}}$ sont les $\mathbf{e}_{\mathbf{k},\varepsilon} = k_1 \mathbf{e}_1 + \dots + k_n \mathbf{e}_n + \mathbf{e}_{\varepsilon}$, où \mathbf{k} décrit $\mathbb{N}^l \times \mathbb{Z}^{n-l}$ et $\mathbf{e}_{\varepsilon} := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \mathbf{e}_i$, et on a

$$w_{\Delta_0}(\mathbf{e}_{\mathbf{k},\varepsilon}) = \sum_{i=1}^l \frac{k_i + \frac{\varepsilon_i}{2}}{d_i} + \sum_{i=l+1}^n \max\left(\frac{k_i + \frac{\varepsilon_i}{2}}{d_i}, -\frac{k_i + \frac{\varepsilon_i}{2}}{d'_i}\right).$$

Si D_{ε} désigne le dénominateur de $(\Delta_0, \frac{\varepsilon}{2})$, la série de Poincaré de $\mathcal{A}_{\Delta_0, \frac{\varepsilon}{2}}$ s'écrit donc

$$P_{\mathcal{A}_{\Delta_0, \frac{\varepsilon}{2}}}(t) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^l \times \mathbb{Z}^{n-l}} t^{D_{\varepsilon} w_{\Delta}(\mathbf{f}_{\mathbf{k},\varepsilon})}.$$

Remarquons au passage que $w_{\Delta_0}(M_{\Delta_0, \frac{\varepsilon}{2}}) \subset w_{\Delta}(M_{\Delta})$, c'est à dire que D_{ε} divise D . On peut donc écrire :

$$P_{\mathcal{A}_{\Delta}}(t) = \sum_{\varepsilon \in E} P_{\mathcal{A}_{\Delta_0, \frac{\varepsilon}{2}}}(t^{\frac{D}{D_{\varepsilon}}}),$$

et en multipliant les deux membres par $(1 - t^D)^n$, on trouve

$$P_{\Delta}(t) = P_{\Delta_0}(t^{\frac{D}{D_0}}) + \sum_{\varepsilon \in E \setminus \{0, \dots, 0\}} P_{\Delta_0, \frac{\varepsilon}{2}}(t^{\frac{D}{D_{\varepsilon}}}).$$

Le résultat découle maintenant de la construction du polygone de Hodge de Δ_0 , et du lemme 4.1 qui relie les polygones $\text{HS}(\Delta_0, \frac{\varepsilon}{2})$ aux séries de Poincaré des $\mathcal{A}_{\Delta_0, \frac{\varepsilon}{2}}$. \square

Ces résultats intermédiaires nous donnent tous les éléments pour démontrer les théorèmes 5.1 et 5.2.

Démonstration. (du théorème 5.1) Remarquons d'abord que

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=-d'_i}^{d_i} a_{ij} \mathbf{x}^{j\mathbf{f}_i} = {}^M g(x),$$

pour le polynôme $g(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=-d'_i}^{d_i} a_{ij} \mathbf{x}_i^j$. D'après le corollaire 5.1, le polygone de Newton générique de la famille des polynômes $f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=-d'_i}^{d_i} a_{ij} \mathbf{x}^{j\mathbf{f}_i}$, $a_{ij} \in k$ est donné par

$$\text{GNP}(\Delta_0, p) \amalg \left(\coprod_{\varepsilon \in E \setminus \{0, \dots, 0\}} \text{GNP}(\Delta_0, \frac{\varepsilon}{2}, p) \right).$$

Le théorème de spécialisation de Grothendieck assure que le polygone de Newton générique de la famille de tous les polynômes de polyèdre Δ vérifie

$$\text{GNP}(\Delta_0, p) \prod \left(\prod_{\varepsilon \in E \setminus \{0, \dots, 0\}} \text{GNP}(\Delta_0, \frac{\varepsilon}{2}, p) \right) \preceq \text{GNP}(\Delta, p) \preceq \text{HP}(\Delta).$$

Finalement le lemme 5.2, joint au théorème 3.1 appliqué au polyèdre Δ_0 , et au corollaire 4.1 nous assurent que le membre de gauche tend vers le membre de droite quand p tend vers ∞ . Donc le polygone $\text{GNP}(\Delta, p)$ tend vers $\text{HP}(\Delta)$ quand p tend vers ∞ . \square

Démonstration. (du théorème 5.2) Pour f un polynôme de la forme

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=-d'_i}^{d_i} a_{ij} \mathbf{x}^{j\mathbf{f}_i}$$

à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}$, on vérifie comme plus haut que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \text{NP}_q(f \bmod \mathfrak{p}) = \text{HP}(\Delta)$$

dès que $\mathcal{H}(a_{ij}) \neq 0$, avec le polynôme de Hasse

$$\mathcal{H}(X_{ij}) = \prod_{i=1}^n \prod_{\varepsilon \in E} \mathcal{H}_{[-d'_i, d_i], \frac{\varepsilon_i}{2}}(X_{ij}).$$

\square

RÉFÉRENCES

- [1] A. ADOLPHSON, S. SPERBER : Exponential sums and Newton polyhedra : Cohomology and estimates, *Ann. Math* **130** (1989), 367–408.
- [2] A. ADOLPHSON, S. SPERBER : On twisted exponential sums, *Math. Ann.* **290** (1991), 713–726.
- [3] A. ADOLPHSON, S. SPERBER : Twisted exponential sums and Newton polyhedra, *J. reine angew. Math.* **443** (1993), 151–177.
- [4] R. BLACHE, É. FÉRARD : Newton stratification for polynomials : the open stratum, *J. Number Th.* **123** (2007), 456–472.
- [5] R. BLACHE, É. FÉRARD, H.J.ZHU : Hodge-Stickelberger polygons for L-functions of exponential sums of $P(x^s)$, preprint, available at <http://arxiv.org/abs/0706.2340>.
- [6] P. DELIGNE : La conjecture de Weil : I. *Publ. Math. IHES* **43** (1974), 273–307.
- [7] J. DENEFF, F. LOESER : Weights of exponential sums, intersection cohomology, and Newton polyhedra. *Inv. Math.* **106** (1991), 275–294.
- [8] B. DWORK : On the zeta function of a hypersurface. *Publ. Math. IHES* **12** (1962), 5–68.
- [9] A. GROTHENDIECK : Formule de Lefschetz et rationalité des fonctions L , Séminaire Bourbaki, exposé 279, 1964/65.
- [10] M. HENK, J. RICHTER-GEERT, G. ZIEGLER : Basic properties of convex polytopes, dans *Handbook of Discrete and Computational Geometry*, CRC Press, 1997.
- [11] N.M. KATZ : Slope filtration of F -crystals, *Astérisque* **63** (1979), 113–164.
- [12] N. KOBLITZ : p -adic numbers, p -adic analysis, and zeta-functions, (Second edition), *Graduate Texts in Mathematics* **58**. Springer-Verlag, New York, 1984.
- [13] A.G. KOUCHNIRENKO : Polyèdres de Newton et nombres de Milnor. *Inv. Math.* **32** (1976), 1–31.
- [14] H. LI, H. J. ZHU : Zeta functions of totally ramified p -covers of the projective line. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **113** (2005), 203–225.

- [15] C. LIU : Generic exponential sums associated to Laurent polynomials in one variable, Preprint, 2008.
- [16] P. ROBBA : Index of p -adic differential operators III. Applications to twisted exponential sums. *Astérisque*, **119-120** (1984), 191–266.
- [17] D. WAN : Newton polygons for zeta and L -functions, *Ann. Math.* **137** (1993), 249–296.
- [18] D. WAN : Variation of p -adic Newton polygons for L -functions of exponential sums, *Asian J. Math.* **8** (2004), 427–472.
- [19] H. J. ZHU : p -adic variation of L functions of one variable exponential sums, I. *Amer. J. Math.* **125** (2003).
- [20] H. J. ZHU : Asymptotic variation of L -functions of one-variable exponential sums. *J. Reine Angew. Math.* **572** (2004), 219–233.

EQUIPE AOC, IUFM DE LA GUADELOUPE
E-mail address: blache@iufm.univ-ag.fr